浜松医科大学紀要　一般教育　第 23 号（2009）

ある漸化式から生じる数の集合について
(1)平均値とメディアン

野田　明男
（総合人間科学講座・数学）

On the Set of Numbers Derived from Some Recurrence Formula (1) Mean and Median

Akio NODA
(Integrated Human Sciences · Mathematics)

Abstract: Let a sequence $f_n(t)$ of polynomials be defined by the following recurrence formula:

$$f_1(t)=1,\ f_{2n}(t)=t\,f_n(t),\ f_{2n+1}(t)=f_n(t)+f_{n+1}(t) \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

The author is interested in the set S_k consisting of natural numbers n such that the degree of $f_n(t)$ is equal to k (k =1,2,3,·····), and investigates its structure from a statistical point of view. Indeed, the various statistics of S_k such as the minimal and maximal values, the mean and the variance, admit closed-form expressions (see §2). For the median M_k of S_k , however, it is not easy to obtain its exact formula of k, although the values of M_k for all $k \leqq 19$ are computed and listed in §1. In the present paper, we are content to apply Paulson's approximation formula ([1]) concerning the Beta distribution to the study of an asymptotic estimate of M_k (see §3), which implies that $M_k = O\left(2^{\frac{5k}{3}}\right)$ as $k \to \infty$ and hence that M_k turns out to be smaller than the mean value $\mu_k = \left(\frac{10}{3}\right)^k$.

Key words: Recurrence formula, Mean, Median, Beta distribution, Paulson's approximation formula.

§ 1. 問題と結果（定理１，定理２）の陳述

次の漸化式によって定まる多項式列 $f_n(t)$ を考える。

$$f_1(t)=1,\ f_{2n}(t)=t\,f_n(t),\ f_{2n+1}(t)=f_n(t)+f_{n+1}(t) \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

これら $f_n(t)$ の列を追うとき，k 次多項式がどこで現れるかという問題に興味をもったのが，この研究の始まりである。すなわち，$f_n(t)$ の次数を d_n とし，d_n が満たす漸化式

$$d_1=0,\ d_{2n}=d_n+1,\ d_{2n+1}=\max(d_n,d_{n+1}) \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

を使って，数の集合 $S_k=\{n \mid d_n=k\}$ を統計的観点に立って考察する。$S_0=\{1\}, S_1=\{2,3,5\}$, $S_2=\{4,6,7,9,10,11,13,19,21\}$, ……となっている。

この論文では S_k のいくつかの統計量－最小値 min (S_k)，最大値 max (S_k)，メディアン M_k，平均値 μ_k，分散 σ_k^2 等を調べる。$|S_k|$ で S_k の要素の個数を表わすと，得られた結果は以下の定理1と定理2にまとめられる。

定理1.（1）$|S_k|=3^k$　　（2）$\min(S_k)=2^k$　　（3）$\max(S_k)=\frac{1}{3}\left(4^{k+1}-1\right)$

（4）$\mu_k=\left(\frac{10}{3}\right)^k$　　（5）$\sigma_k^2=\frac{35}{33}\cdot 12^k-\left(\frac{10}{3}\right)^{2k}-\frac{2}{33}$

この結果は，集合 S_k が3つの写像 $p_v\left(v\in V=\{-1,0,1\}\right)$ によって完全に記述される事実から，比較的容易に証明される（§2参照）。しかしながら，S_k の順序構造は少し複雑であり，中央の位置を示すメディアン M_k を k の式として閉じた形に表わすことは容易ではない。2項分布の上側確率（これがベータ分布の分布関数 $I_x(\alpha,\beta)$ で表わされることは周知の事実である）を調べて，M_k の値を含み，相対的に小さな幅の区間をわれわれは見出したい。事実，上記 $I_x(\alpha,\beta)$ に関するPaulsonの近似式（[1]）を応用して，次の結果に到達する。（定理2の証明は§3で詳述する。）

定理2.　十分大きな m に対し，次の不等式が成り立つ。

$$5\cdot 2^{5m-4}+\frac{1}{3}\left(2^{5m-6}+2^{m-1}\right)\leqq M_{3m-1}\leqq 5\cdot 2^{5m-4}+\frac{1}{3}\left(2^{5m-5}-2^{m-1}\right)$$

$$9\cdot 2^{5m-3}-\frac{1}{3}\left(2^{5m-3}-2^{m-1}\right)\leqq M_{3m}\leqq 9\cdot 2^{5m-3}-\frac{1}{3}\left(2^{5m-4}+2^{m-1}\right)$$

$$3\cdot 2^{5m}+\frac{1}{3}\left(2^{5m-2}+2^{m-1}\right)\leqq M_{3m+1}\leqq 3\cdot 2^{5m}+\frac{1}{3}\left(2^{5m-1}-2^{m-1}\right)$$

定理2の M_k の評価式は，$M_k=O\left(2^{\frac{5k}{3}}\right)$ を教える。従って，$2^{\frac{5}{3}}<\frac{10}{3}$ に留意して定理1(4)を使えば，十分大きな k に対し，$M_k<\mu_k$ が成り立つことがわかる。この不等式は，「右裾の長い分布」が示す諸特徴の中でも第一に挙げられる性質である（[3]）。

注意1．$3 \leqq k \leqq 19$ のとき，2項分布の上側確率に関し，2項係数を含む式を具体的に計算して，定理2の正しさを確かめるとともに，M_k の正確な値を求めた。$M_1 = 3, M_2 = 10$ は明らか。以下，$M_3 = 35$，$M_4 = 101$，$M_5 = 326$，$M_6 = 1114$，$M_7 = 3235$，$M_8 = 10469$，$M_9 = 35609$, $M_{10} = 103589$, $M_{11} = 336473$，$M_{12} = 1137962$，$M_{13} = 3315667$，$M_{14} = 10783637$，$M_{15} = 36397987$，$M_{16} = 106122664$, $M_{17} = 345351896$, $M_{18} = 1164505706$, $M_{19} = 3396507003$　となっている。$20 \leqq k \leqq 36$ の範囲の k に対しては，ベータ函数表（[2]）を利用して，定理2の主張を確認した。なお，$k \geqq 37$ の場合にも定理2は成り立つであろうと予想する。しかし，証明する手立てが今，著者にあるわけではない。

§ 2.　数の集合 S_k の構造と平均値（定理１の証明）

われわれの集合 S_k の構造は，3種類の写像

$$p_0(n)=2n,\ p_{-1}(n)=4n-1,\ p_1(n)=4n+1$$

によって完全に記述される。すなわち，$p_v\ (v\in V=\{-1,0,1\})$ は S_k から S_{k+1} への1対1写像である（$k=0,1,2,\cdots\cdots$）。

補題1.（1）$n\in S_k$ ならば，$n+1,n-1\in S_{k-1}\cup S_k\cup S_{k+1}$ である。

（2）$n\in S_k$ ならば，$p_v(n)\in S_{k+1}\ (v\in V)$ である。

（証明）（1）n に関する数学的帰納法で示す。$n=2m\in S_k$ ならば，$d_n=d_m+1, d_{n-1}=\max(d_{m-1},d_m)$, $d_{n+1}=\max(d_m,d_{m+1})$ である。帰納法の仮定により，d_{m-1},d_{m+1} は d_m と高々 1 しか違わないので，$|d_n-d_{n-1}|\leqq 1,\ |d_n-d_{n+1}|\leqq 1$ が成り立つ。また，$n=2m+1\in S_k$ ならば，$d_n=\max(d_m,d_{m+1})$, $d_{n-1}=d_m+1, d_{n+1}=d_{m+1}+1$ から同様にして，$|d_n-d_{n-1}|\leqq 1,\ |d_n-d_{n+1}|\leqq 1$ が従う。

（2）$n\in S_k$ ならば，$d_{2n}=d_n+1=k+1$ 故 $p_0(n)\in S_{k+1}$ は明らか。また，$k-1\leqq d_{n-1}\leqq k+1$ に留意して，$d_{4n-1}=\max(d_{2n-1},d_{2n})=\max(d_{n-1},d_n,d_n+1)=k+1$ を得て，$p_{-1}(n)\in S_{k+1}$ が示される。$p_1(n)\in S_{k+1}$ も同様に示される。

補題1によって，$S_0=\{1\}$ からスタートして，$S_1=\{p_0(1),p_{-1}(1),p_1(1)\}$,
$S_2=\{p_0(n),p_{-1}(n),p_1(n)\mid n\in S_1\}=$
$\{p_0^2(1),p_0\circ p_{-1}(1),p_{-1}\circ p_0(1),p_1\circ p_0(1),p_0\circ p_1(1),p_{-1}^2(1),p_1\circ p_{-1}(1),p_{-1}\circ p_1(1),p_1^2(1)\}$ という風に，高次の集合 S_k が順々に構成される。すなわち，S_k の任意の要素 n は，

$$n=p_{v_k}\circ\cdots\circ p_{v_2}\circ p_{v_1}(1)=p_{\vec v}(1),\ \vec v=(v_k,\cdots,v_2,v_1)\in V^k$$

の形に，k 個の重複順列 $\vec v\in V^k$ と 1 対 1 に対応する。こうして，$|V^k|=3^k$ なので，定理1（1）が示される。また，S_k の最小値は，$p_0^k(1)=2^k$，最大値は，$p_1^k(1)=\sum_{j=0}^{k}4^j=\frac{1}{3}(4^{k+1}-1)$ で与えられる（定理1（2）と（3））。記法を簡略にするため，$\sum_{n\in S_k}n^r=T_k(r)\ (r=1,2,3,4)$ とおく。

補題2.（1）$T_k(1)=10^k$　　（2）$T_k(2)=\dfrac{35}{33}\cdot 36^k-\dfrac{2}{33}\cdot 3^k$

（3）$T_k(3)=\dfrac{25}{21}\cdot 136^k-\dfrac{4}{21}\cdot 10^k$　　（4）$T_k(4)=\dfrac{10013}{7175}\cdot 528^k-\dfrac{560}{1353}\cdot 36^k+\dfrac{106}{5775}\cdot 3^k$

（証明）（1）$\sum_{v\in V}p_v(n)=10n$ に留意して，$T_{k+1}(1)=10T_k(1)$ を得，$T_0(1)=1$ から $T_k(1)=10^k$ が従う。

（2）$\sum_{v\in V}\left(p_v(n)\right)^2 = 36n^2+2$ から，$T_{k+1}(2)=36T_k(2)+2\cdot 3^k$ が従う。ここで，$T_k(2)=c_k\cdot 36^k$ とおけば，$c_0=1, c_{k+1}-c_k=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{12}\right)^k$ となり，$c_k = 1+\frac{1}{18}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{12}\right)^j = 1+\frac{2}{33}\left\{1-\left(\frac{1}{12}\right)^k\right\}$ つまり，$T_k(2)=\frac{35}{33}\cdot 36^k-\frac{2}{33}\cdot 3^k$ が示される。

（3）（4）の結果は，上記（2）と同じ論法で示される。

さて，S_k の平均値 μ_k は，$\mu_k=\frac{1}{3^k}T_k(1)=\left(\frac{10}{3}\right)^k$ と計算される。分散 σ_k^2 は，

$\sigma_k^2=\frac{1}{3^k}T_k(2)-\mu_k^2=\frac{35}{33}\cdot 12^k-\frac{2}{33}-\left(\frac{10}{3}\right)^{2k}$ で求められる（定理1の（4）と（5））。

補題2（3）と（4）により，S_k の歪度 $\alpha_k(3)$ と尖度 $\alpha_k(4)$ （[3]）を求めて，この節を終えよう。

標準偏差 $\sigma_k=\left\{\frac{35}{33}\cdot 12^k-\left(\frac{10}{3}\right)^{2k}-\frac{2}{33}\right\}^{1/2}=O\left(\left(2\sqrt{3}\right)^k\right)$ に留意して，

$$
\begin{aligned}
\alpha_k(3) &= \frac{1}{\sigma_k^3}\left\{\frac{1}{3^k}T_k(3)-3\mu_k\cdot\frac{1}{3^k}T_k(2)+2\mu_k^3\right\}\\
&= \frac{1}{\sigma_k^3}\left\{\frac{25}{21}\left(\frac{136}{3}\right)^k-\frac{35}{11}\cdot 40^k+2\left(\frac{10}{3}\right)^{3k}-\frac{2}{231}\left(\frac{10}{3}\right)^k\right\},\\
\alpha_k(4) &= \frac{1}{\sigma_k^4}\left\{\frac{1}{3^k}T_k(4)-4\mu_k\cdot\frac{1}{3^k}T_k(3)+6\mu_k^2\cdot\frac{1}{3^k}T_k(2)-3\mu_k^4\right\}\\
&= \frac{1}{\sigma_k^4}\left\{\frac{10013}{7175}\cdot 176^k-\frac{100}{21}\left(\frac{1360}{9}\right)^k+\frac{70}{11}\left(\frac{400}{3}\right)^k-3\left(\frac{10}{3}\right)^{4k}+\frac{92}{231}\left(\frac{10}{3}\right)^{2k}-\frac{560}{1353}\cdot 12^k+\frac{106}{5775}\right\}
\end{aligned}
$$

を導く。$k\to\infty$ のとき，$\alpha_k(3)=O\left(\left(\frac{17}{9\sqrt{3}}\right)^k\right), \alpha_k(4)=O\left(\left(\frac{11}{9}\right)^k\right)$ そして変動係数 $\frac{\sigma_k}{\mu_k}=O\left(\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^k\right)$ はいずれも $+\infty$ に発散することがわかる。こうして k が大きくなるとともに，「右裾の長い分布」という S_k の統計的性格がもたらす諸特徴が一層目立つことになる。

§ 3.　メディアン M_k の漸近挙動（定理２の証明）

S_k の要素を記述する合成写像 $p_{\vec{v}} = p_{v_k} \circ \cdots \circ p_{v_2} \circ p_{v_1} \left(\vec{v} = (v_k, \cdots, v_2, v_1) \in V^k\right)$ の間の順序構造を調べるために，重複順列の空間 V^k を，k 回の選択のうち，0の選ばれた回数 ℓ によって分割することから始める。

$W_k(\ell) = \{\ \vec{v} = (v_k, \cdots, v_2, v_1) \in V^k\ \mid v_i = 0$ となる番号 i は ℓ 個ある $\}\ (\ell = 0, 1, 2, \cdots, k)$

とすれば，$|W_k(\ell)| = {}_kC_\ell 2^{k-\ell}$ である。

<u>補題3</u>.　$1 \leqq \ell \leqq k-1$, n は任意の自然数とする。

(1) $\min\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell), v_1 = -1\} = p_0^{\ell} \circ p_{-1}^{k-\ell}(n) = 2^{2k-\ell} \cdot n - \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell} - 2^{\ell})$

(2) $\max\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell), v_1 = -1\} = p_0^{\ell} \circ p_1^{k-\ell-1} \circ p_{-1}(n) = 2^{2k-\ell} \cdot n - \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell-1} + 2^{\ell})$

(3) $\min\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell), v_1 = 0\} = p_0^{\ell-1} \circ p_{-1}^{k-\ell} \circ p_0(n) = 2^{2k-\ell} \cdot n - \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell-1} - 2^{\ell-1})$

(4) $\max\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell), v_1 = 0\} = p_0^{\ell-1} \circ p_1^{k-\ell} \circ p_0(n) = 2^{2k-\ell} \cdot n + \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell-1} - 2^{\ell-1})$

(5) $\min\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell), v_1 = 1\} = p_0^{\ell} \circ p_{-1}^{k-\ell-1} \circ p_1(n) = 2^{2k-\ell} \cdot n + \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell-1} + 2^{\ell})$

(6) $\max\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell), v_1 = 1\} = p_0^{\ell} \circ p_1^{k-\ell}(n) = 2^{2k-\ell} \cdot n + \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell} - 2^{\ell})$

以上，(1)から(6)までの数値は単調に大きくなって行く。

(7) $\max\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell)\} = 2^{2k-\ell} \cdot n + \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell} - 2^{\ell})$

$< \min\{p_{\vec{v}}(n); \vec{v} \in W_k(\ell-1)\} = 2^{2k-\ell+1} \cdot n - \dfrac{1}{3}(2^{2k-\ell+1} - 2^{\ell-1})$

補題3の計算は容易であり，くわしい証明は省略したい。

$S_k = \{p_{\vec{v}}(1); \vec{v} \in \bigcup_{\ell=0}^{k} W_k(\ell)\}$ の順序構造は，$W_k(k) = \{\vec{0} = (0, \cdots, 0)\}$ に対応する最小値 $p_0^k(1) = 2^k$ から始まり，$W_k(k-1)$ に対応するもの，$W_k(k-2)$ に対応するもの，……と移るごとに大きくなって行き，最後 $W_k(0)$ に対応する 2^k 通りの数（$p_{-1}^k(1)$ からの最大値 $p_1^k(1) = \dfrac{1}{3}(4^{k+1} - 1)$ にわたる）に至る。他方，同じ $W_k(\ell)$ 内では，v_1 から順にみて行き，初めて同じ値でなくなる成分 v_i に着目する。その

値を比べて，$-1,0,1$の順序で定まる辞書式順序になっている。こうして，メディアンM_kを求めるには，$\sum_{\ell=m+1}^{k} {}_kC_\ell 2^{k-\ell} < \frac{3^k+1}{2}, \sum_{\ell=m}^{k} {}_kC_\ell 2^{k-\ell} \geqq \frac{3^k+1}{2}$を同時に満たす整数$m$を，まず定める必要がある。そして，$\{p_{\vec{v}}(1); \vec{v} \in W_k(m)\}$の中で，小さい順にみて，$\left\{\frac{3^k+1}{2} - \sum_{\ell=m+1}^{k} {}_kC_\ell 2^{k-\ell}\right\}$番目の数に対応する重複順列$\vec{v}_0 \in W_k(m)$を探さなければならない（$M_k = p_{\vec{v}_0}(1)$）。

このために，上記の不等式をそれぞれ3^kで割って，成功の確率1/3の2項分布に移行する。そして，2つの上側確率$\sum_{\ell=m+1}^{k} {}_kC_\ell \left(\frac{1}{3}\right)^\ell \left(\frac{2}{3}\right)^{k-\ell} = I_{\frac{1}{3}}(m+1, k-m), \sum_{\ell=m}^{k} {}_kC_\ell \left(\frac{1}{3}\right)^\ell \left(\frac{2}{3}\right)^{k-\ell} = I_{\frac{1}{3}}(m, k-m+1)$を評価する。

ここで，$I_x(\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$はベータ分布の分布関数を表わす。$\alpha, \beta$がともに大きいとき，次の近似式が有用である（[1]p.99参照）。

<u>Paulsonの近似式</u>　　$\Phi(x)$で標準正規分布の分布関数を表わすとき，次式が成り立つ。

$$I_x(\alpha,\beta) \fallingdotseq \Phi\left(\frac{3\left\{(\beta x)^{\frac{1}{3}} - (\alpha(1-x))^{\frac{1}{3}}\right\} - \frac{1}{3}\left\{\beta^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} - \alpha^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\right\}}{\left\{\beta^{-\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \alpha^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}}\right)$$

さて，自然数mと$v \in V$によって，$k = 3m + v$とかくと，逆にmとvはkから一意的に求まる。このとき，十分大きなmに対し，Paulsonの近似式を適用すれば，下記の補題4を得て，

$$I_{\frac{1}{3}}(m+1, 2m+v) < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad I_{\frac{1}{3}}(m, 2m+v+1) > \frac{1}{2}$$

が成り立つことがわかる。次に，$J_m(v) = \frac{3^k+1}{2} - \sum_{\ell=m+1}^{k} {}_kC_\ell 2^{k-\ell}$とおき，$3^{-k}$の項は無視して，比

$$J_m(v) : {}_kC_m 2^{k-m} \fallingdotseq \left\{\frac{1}{2} - I_{\frac{1}{3}}(m+1, 2m+v)\right\} : \left\{I_{\frac{1}{3}}(m, 2m+v+1) - I_{\frac{1}{3}}(m+1, 2m+v)\right\}$$

の漸近挙動（補題5）を調べる。このように，この節の後半は，探求すべき$\vec{v}_0 \in W_k(m)$のおよその在り処を見出す仕事に費される。

<u>補題4</u>.　十分大きなmに対し，$h_m = \frac{1}{3\sqrt{6m}}$とおくと次式が成り立つ。

（1）　$I_{\frac{1}{3}}(m+1, 2m-1) \fallingdotseq \Phi\left(-8h_m\left\{1 + \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}\right)$

$$I_{\frac{1}{3}}(m+1,2m) \fallingdotseq \Phi\left(-5h_m\left\{1+\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}\right)$$

$$I_{\frac{1}{3}}(m+1,2m+1) \fallingdotseq \Phi\left(-2h_m\left\{1-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}\right)$$

(2)　$I_{\frac{1}{3}}(m,2m) \fallingdotseq \Phi(h_m)$

$$I_{\frac{1}{3}}(m,2m+1) \fallingdotseq \Phi\left(4h_m\left\{1-\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}\right)$$

$$I_{\frac{1}{3}}(m,2m+2) \fallingdotseq \Phi\left(7h_m\left\{1-\frac{17}{126}\cdot\frac{1}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}\right)$$

補題4の式はすべて，Paulsonの近似式に $(1+x)^\alpha$ の冪級数展開を適用して，近似計算した結果に他ならない。

補題5.　$m\to\infty$ のとき，次式が成り立つ。

$$\frac{\frac{1}{2}-I_{\frac{1}{3}}(m+1,2m+v)}{I_{\frac{1}{3}}(m,2m+v+1)-I_{\frac{1}{3}}(m+1,2m+v)}=\frac{r_v}{9}+\frac{s_v}{1458}\cdot\frac{1}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

ここで，$r_{-1}=8,\ r_0=5,\ r_1=2,\ s_{-1}=s_0=-13,\ s_1=41$ である。

（証明）　$x>0$ が十分小さいとき，

$$\Phi(x)-\Phi(0)=\Phi(0)-\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\left\{1-\frac{x^2}{6}+O(x^4)\right\}$$

とかける。従って，$v=-1$ のとき，

$$\frac{1}{2}-I_{\frac{1}{3}}(m+1,2m-1)=\Phi(0)-\Phi(-8h_m\left\{1+\frac{5}{48}\cdot\frac{1}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\})$$

$$=\frac{8}{\sqrt{2\pi}}h_m\left\{1-\frac{121}{1296}\cdot\frac{1}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}$$

$$I_{\frac{1}{3}}(m,2m)-I_{\frac{1}{3}}(m+1,2m-1)=\left\{\Phi(h_m)-\Phi(0)\right\}+\left\{\Phi(0)-\Phi(-8h_m\left\{1+\frac{5}{48}\cdot\frac{1}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\})\right\}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{2\pi}}h_m\left\{1-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}$$ となる。比をとれば，

$$\frac{8}{9}\left\{1-\frac{121}{1296}\cdot\frac{1}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}\left\{1-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}^{-1}=\frac{8}{9}-\frac{13}{1458}\cdot\frac{1}{m}+O(\frac{1}{m^2})$$

を得る。$v=0,1$ の場合も，同じ手法で結果が示される。

今や定理2の M_k の評価式へと進む用意が整った。(v_3, v_2, v_1) の値を指定することによって，$W_k(m)$ を27個の部分集合 $W_k(m\,;v_3, v_2, v_1)$ に分割しよう。それらの間の順序関係は，補題3によって，以下のようにかける。

$$W_k(m\,;-1,-1,-1) < W_k(m\,;0,-1,-1) < W_k(m\,;1,-1,-1) < W_k(m\,;-1,0,-1) < W_k(m\,;0,0,-1) <$$
$$W_k(m\,;1,0,-1) < W_k(m\,;-1,1,-1) < W_k(m\,;0,1,-1) < W_k(m\,;1,1,-1) < W_k(m\,;-1,-1,0) <$$
$$W_k(m\,;0,-1,0) < W_k(m\,;1,-1,0) < W_k(m\,;-1,0,0) < W_k(m\,;0,0,0) < W_k(m\,;1,0,0) <$$
$$W_k(m\,;-1,1,0) < W_k(m\,;0,1,0) < W_k(m\,;1,1,0) < W_k(m\,;-1,-1,1) < W_k(m\,;0,-1,1) <$$
$$W_k(m\,;1,-1,1) < W_k(m\,;-1,0,1) < W_k(m\,;0,0,1) < W_k(m\,;1,0,1) < W_k(m\,;-1,1,1) <$$
$$W_k(m\,;0,1,1) < W_k(m\,;1,1,1)$$

(v_3, v_2, v_1) の3つの成分に出現する0の回数を i とすれば，$\left|W_k(m;v_3,v_2,v_1)\right| = {}_{k-3}C_{m-i}2^{k-m+i-3}$ を得る。

$k = 3m + v$ として，$\left|W_k(m)\right| = {}_kC_m 2^{k-m}$ との比を計算すれば，$i = 0$ のとき $(\frac{1}{3})^3\left\{1+\frac{v-1}{2m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}$,

$i = 1$ のとき $(\frac{1}{3})^3\left\{1+\frac{1}{2m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}$, $i = 2$ のとき $(\frac{1}{3})^3\left\{1-\frac{v}{2m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}$,

$i = 3$ のとき $(\frac{1}{3})^3\left\{1-\frac{v+2}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\}$ と結論できる。補題5に留意して，メディアンを与える $\vec{v}_0 \in W_k(m)$ を探すと，「$v = -1$ なら $\vec{v}_0 \in W_k(m;1,0,1)$, $v = 0$ なら $\vec{v}_0 \in W_k(m;-1,1,0)$, $v = 1$ なら $\vec{v}_0 \in W_k(m;1,0,-1)$」という風に，27個ある部分集合のうち，特定の1つに $\vec{v}_0$ の在り処をしぼり込むことに成功する。こうして特定された部分集合に対応する数 $p_{\vec{v}}(1)$ の中で，最小値と最大値を補題3から算出した結果が，定理2の不等式に他ならない。

最後に，大学行事で出会った確率問題を1つ取りあげて，よく知られた中心極限定理とわれわれが依拠したPaulsonの近似式とを比較する。

<u>注意2</u>. 浜松医科大学では，入学ガイダンスの一貫として新入生の合宿研修を毎年実施している。その開始をつげる「アイス・ブレイキング」は，山本清二准教授（光量子医学研究センター）の担当。壇上に立つ山本先生は，$n = 155$ 人の新入生を相手にじゃんけんを行って，場の雰囲気をやわらげる。これは，先生に勝った者のみ生き残って，次回のじゃんけんに進むゲームである。生き残る人がいなくなった時点でゲームは終了し，昼食の席に全員移ることになる。ここでは初回のじゃんけんの結果，生き残った人数 X の95% 信頼区間を構成する課題に取り組む。（ゲーム終了までの待ち時間 T も興味深いテーマであるが，T の確率解析は機会を改めて考察したい。）

通常用いられる中心極限定理は，確率変数 X が成功の確率1/3の2項分布に従うので，

$\frac{n}{3} - 1.96\cdot\frac{\sqrt{2n}}{3} \leqq X \leqq \frac{n}{3} + 1.96\cdot\frac{\sqrt{2n}}{3}$，つまり $n = 155$ の場合，40.16≦ X ≦63.17という範囲を与え，整数値の X に対し，端点の決め方に苦しむことになる。Paulsonの近似式によれば，

$P(X \geqq 65) = I_{\frac{1}{3}}(65,91) = \Phi(-2.1565) \fallingdotseq 1.55\%$ で，期待される2.5%よりも小さく，$P(X \geqq 64) = I_{\frac{1}{3}}(64,92) = \Phi(-1.9916) \fallingdotseq 2.32\%$ は満足できるレベルとなる。また，$P(X \geqq 40) = \Phi(2.1102) \fallingdotseq 98.26\%$ は期待される97.5%よりも大きいが，$P(X \geqq 41) = \Phi(1.9319) \fallingdotseq 97.33\%$ となる。このように Paulson の近似式は，適切な範囲 $41 \leqq X \leqq 63$（それが実現する確率は，約95.01%）をわれわれに恵む。

謝辞

レフェリーの指摘を受けて，理解のしやすい記述に改めることができました。レフェリーに深く感謝申しあげます。資料の整理に加えて，原稿の清書をお願いした鴨藤江利子さんに，心から御礼申しあげます。

参考文献

[1] 山内二郎（編）：統計数値表 JSA-1972．日本規格協会，1972.
[2] 春日屋伸昌（編）：実用数表大系15 ガンマ函数表・ベータ函数表．技報堂，1972.
[3] 東京大学教養学部統計学教室（編）：統計学入門．東京大学出版会，1991.